

# Повышение устойчивости явных схем при компьютерном моделировании динамических задач термоупругости

А.А. Каландаров, E-mail: abrorshox@mail.ru, ,

Гулистанский государственный университет

**Аннотация.** В статье предложены явные конечно-разностные соотношения, которые дают возможность повысить устойчивость явных схем при численном решении связанных динамических задач термоупругости. В качестве примера численно решена одномерная связанная динамическая задача для изотропных тел, с использованием разных явных конечно-разностных схем. Приведен анализ численных экспериментов.

**Ключевые слова:** Напряжение, деформация, явная схема, устойчивость

## Введение

Исследование термоупругих состояний конструкций и их элементов является актуальной проблемой математического моделирования. При постановке термоупругих задач различают связанные и несвязанные краевые задачи.

В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, определяющего соотношения Дюамеля-Неймана, соотношения Коши, и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Заметим, что в этом случае, уравнения движения записанные в перемещениях и уравнение притока тепла являются связанными, т.е. температура как неизвестная функция входит в уравнение движения, а уравнение притока тепла зависит от перемещения. Если внешние факторы, вызывающие движение тела, изменяются во времени очень медленно, то в уравнении движения можно пренебречь инерционными членами, трактуя задачу как квазистатическую. При этом начальные условия относительно перемещений отпадают, но квазистатическая задача остается связанной. Если величины, вызывающие деформацию и температуру, изменяются достаточно медленно от нуля до своих конечных значений и остаются в таком состоянии, то мы получим статическую задачу. Перемещение и температура становятся не зависящими от времени и являются функциями координат положения

точек и в уравнениях исчезают слагаемые содержащие производные по времени. В этом случае имеем несвязанную задачу термоупругости.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим связанную задачу термоупругости для анизотропных тел, она состоит из уравнения движения [1-3]

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

соотношения Дюамеля-Неймана для изотропных тел

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

уравнение притока тепла для изотропных тел

$$\lambda_0 T_{,ii} - c_e \dot{T} - \gamma T \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \quad (4)$$

с начальными

$$u_i \Big|_{t=t_0} = \phi_i \quad \dot{u}_i \Big|_{t=t_0} = \psi_i \quad T \Big|_{t=t_0} = T_0 \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$u_i \Big|_{\Sigma_1} = u_i^0 \quad T \Big|_{\Sigma} = \bar{T}_0 \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}$ —тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij}$ —тензор деформаций,  $u_{ij}$ —перемещения,  $T$ —температура,  $X_i$ —объёмные силы,  $\lambda, \mu$ —упругие постоянные Ламе,  $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  шаровая часть тензора деформаций,  $c_e$ —теплоемкость при постоянной деформации,  $n_j$ —внешняя нормаль к поверхности  $\Sigma_2$ ,  $S_1, S_2, S_3$ —компоненты вектора внешней нагрузки,  $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ ,  $\alpha$ — коэффициент теплового расширения,  $\lambda_0$ —коэффициент теплопроводности,  $\lambda_{ij}$ —тензор теплового потока,  $\rho$ —плотность,  $\delta_{ij}$ —символ Кронекера.

Подставляя (3) в (2), и полученное в (1), мы будем иметь уравнения движения в перемещениях. Таким образом, краевая задача (1)-(6) в одномерном случае, приобретает следующий вид [4-7]

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c_e \frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T \frac{\partial u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (8)$$

с соответствующими начальными

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \phi \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi \quad T(x, t) \Big|_{t=0} = T_0 \quad (9)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=0} &= u_0 & u(x, t) \Big|_{x=l} &= \bar{u}_0 \\ T(x, t) \Big|_{x=0} &= T_1(t) & T(x, t) \Big|_{x=l} &= T_2(t) \end{aligned} \quad (10)$$

## 2. Численная реализация

Построив в  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq l$  два семейства параллельных прямых и заменяя производные в уравнениях (7)-(8) конечно-разностными отношениями можно найти следующие разностные уравнения

$$(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} = \rho \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} \quad (11)$$

$$\lambda_0 \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} - c_\varepsilon \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} - \gamma T_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{4h\tau} = 0 \quad (12)$$

Эти уравнения внутри области имеют второй порядок аппроксимации. Разрешив эти разностные уравнения (11) и (12) относительно  $u_{ij+1}$  и  $T_{ij+1}$  соответственно, получим

$$u_i^{j+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} \right) + 2u_i^j - u_i^{j-1} \quad (13)$$

$$T_i^{j+1} = \frac{2\tau}{c_\varepsilon} \left( \lambda_0 \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} - \gamma T_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{4h\tau} \right) + T_i^{j-1} \quad (14)$$

Как видно, уравнения (13)-(14) позволяют найти значения функций  $u(x, t)$  и  $T(x, t)$  на слое  $t^{j+1}$ , если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции  $u(x, t)$  на двух начальных слоях  $j=0$  и  $j=1$  мы найдём из начальных и краевых условий, а для функции  $T(x, t)$  найдём, заменяя смешанные производные другими разностными отношениями

$$u_i^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^0 - T_{i-1}^0}{2h} \right) + 2u_i^0 + 2\psi\tau \right) \quad (15)$$

$$T_i^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left( \lambda_0 \frac{T_{i+1}^0 - 2T_i^0 + T_{i-1}^0}{h^2} - \gamma T_i^0 \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^1 - u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0}{2h\tau} \right) + T_i^0 \quad (16)$$

Рекуррентные формулы (13) и (14) позволяют найти значения перемещений и температуры на слоях по времени, используя начальные и краевые условия.

Известно, что в явных схемах шаг  $\tau$  по времени  $t$  очень маленький по сравнению с  $h$ . Обычно, требуется выполнение следующего условия сходимости  $0 < \tau^2/h \leq 1/2$ .

Применяя схему «ромб» (схема Дюфорта и Франкела) к уравнениям (11)-(12), получим

$$(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1}^j - u_i^{j+1} - u_i^{j-1} + u_{i-1}^j}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} = \rho \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} \quad (17)$$

$$\lambda_0 \frac{T_{i+1}^j - T_i^{j+1} - T_i^{j-1} + T_{i-1}^j}{h^2} - c_\epsilon \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} - \gamma T_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{4h\tau} = 0 \quad (18)$$

Конечно-разностные уравнения (17)-(18) остаются явными относительно  $u_i^{j+1}$  и  $T_i^{j+1}$  соответственно, и являются устойчивыми. В этом случае будем иметь следующие рекуррентные формулы

$$u_i^{j+1} = \left( (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1}^j - u_i^{j-1} + u_{i-1}^j}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} + \rho \frac{2u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau^2} \right) / \left( \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} \right) \quad (19)$$

$$T_i^{j+1} = \left( \lambda_0 \frac{T_{i+1}^j - T_i^{j-1} + T_{i-1}^j}{h^2} + c_\epsilon \frac{T_i^{j-1}}{2\tau} - \gamma T_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{4h\tau} \right) / \left( \frac{\lambda_0}{h^2} + \frac{c_\epsilon}{2\tau} \right) \quad (20)$$

### 3. Тестовая задача

Модельная задача решалась при следующих начальных и краевых условиях

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad T(x, t)|_{t=0} = T_0 \sin\left(\frac{\pi x_l}{l}\right) \\ u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad T(x, t)|_{x=0} = 0 \quad T(x, t)|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

при ниже приведенных значениях констант

$$\lambda=0.77, \mu=0.47, \alpha=0.05, \rho=0.87, c_\epsilon=3.25, \lambda_0=0.032, T_0=18, l=1, N=10, h=0.1.$$

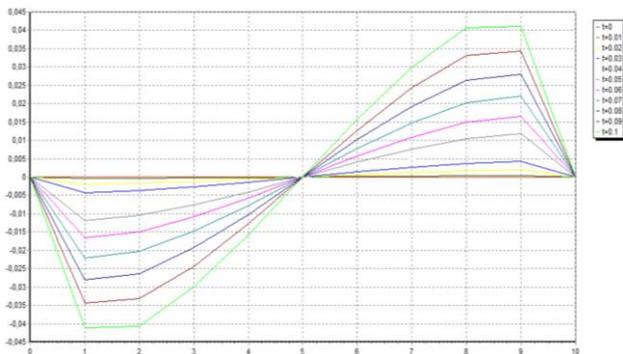


Рис. 1. График распространения перемещений  $u(x,t)$  по оси  $OX$  (явная схема) при  $\tau=0.01$

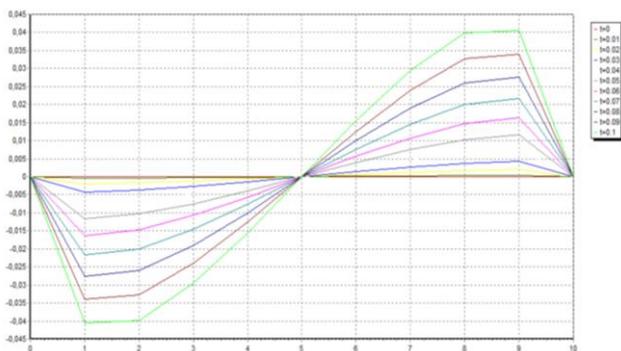


Рис. 2. График распространения перемещений  $u(x,t)$  по оси  $OX$  (явная схема ромб) при  $\tau=0.01$

Кроме этого задача (1)-(6) была решена с использованием неявных схем. Нами было разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты. Результаты численных экспериментов показали устойчивость разностных уравнений (19)-(20), при больших шагах по времени.

### Заключение

В данной статье рассмотрена связанная динамическая краевая задача термоупругости в одномерном случае. Предложен алгоритм для численного решения связанных задач термоупругости и явные конечно-разностные соотношения, которые дают возможность повысить устойчивость явных схем при численном решении связанных

динамических задач термоупругости. Анализ численных экспериментов показывает устойчивость предложенных разностных схем.

### **Литература**

1. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. -М.: МГУ, 1996. - 343с.
2. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю.С. Связанные задачи термоупругости и термопластичности. – Ташкент: «Fan va texnologiya», 2019. – 204 с.
3. Kalandarov A.A., Babadjanov M.R. Numerical simulation of the coupled dynamic thermoelastic problem for orthotropic bodies. International journal of computer science and mobile computing, 2019. Vol. 8, Issue 9, pp. 182-189.
4. Babadjanov M.R., Kalandarov A.A., Adambaev U.E. Numerical modeling of the process of thermoplastic deformation of transversally isotropic parallelepipeds. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-9 Issue-6, April 2020, DOI: 10.35940/ijitee.F4314.049620?, pp. 1484-1491.
5. Qalandarov A.A., Khaldjigitov A.A. Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoelastic problem for isotropic bodies. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 11, N. 1, 2020, pp. 119-126.
6. Kalandarov A.A., Kalandarov A., Allayarov S., Kulmamatov S., Adilov A., Islikov S. Numerical modeling of partially coupled problems of thermoelasticity. IJATCSE. Vol. 9, N. 3, 2020, pp. 3095-3099. DOI:10.30534/ijatcse/2020/92932020
7. Khaldjigitov A.A., Babadjanov M.R., Kalandarov A.A., Khudazarov R.S. Coupled dynamic thermoelasticity problem for transversely isotropic parallelepiped. IJETER. Vol. 8, N. 7, 2020, pp. 3958-3964. DOI: 10.30534/ijeter/2020/166872020